ΛN 散乱の全断面積の計算

§1 依頼内容

ΛN の中心力ポテンシャル $V(r)$ が与えられたときに、低エネルギーの ΛN 散乱の全断面積を数値的に求める手順を教えてください。

§2 Schrödinger 方程式

重心系における Schrödinger 方程式の動径部分は、相対座標 $\vec{r}$ の波動関数を $\Psi(\vec{r}) = \frac{u_L(r)}{r} Y_L(\hat{r})$ と書くと、$u_L(r)$ の二階微分方程式の形に書くことができる。

$$u_L'' - \frac{L(L+1)}{r^2} u_L - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E) u_L = 0 \tag{1}$$

簡単のために、これを以下のように書くことにする。

$$u_L'' + A_L(r;k) u_L = 0 \tag{2}$$

ただし、

$$A_L(r;k) = -\frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E), \qquad k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \tag{3}$$

§3 Fox-Goodwin/Numerov 法

上に示した二階微分方程式を数値的に解くために、以下のような差分方程式に書き換える。

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} A(r_{n+1})\right) u(r_{n+1}) - \left(2 - \frac{5h^2}{6} A(r_n)\right) u(r_n) + \left(1 + \frac{h^2}{12} A(r_{n-1})\right) u(r_{n-1}) = 0 \tag{4}$$

ここで、h は動径座標 r を離散化した際の微少間隔である。原点での境界条件 $u(0) = 0$(および Δ を非ゼロの任意の値として $u(h) = \Delta$) を課すことにより、原点から外側へ向かって Schrödinger 方程式を満たす解を求めることができる。

§4 Phase shift

二粒子間の相対距離がある値 (r_{max}) より大きなところでは、ポテンシャルがゼロと見なせると仮定すると、$r > r_{max}$ での散乱波の波動関数は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} u_L(r) &\propto kr(C j_L(kr) - D n_L(kr)) \qquad (5) \\ &\to \sin\left(kr - \frac{L\pi}{2} + \delta_L\right) \qquad (6) \end{aligned}$$

j_L および n_L は球ベッセルおよび球ノイマン関数である。δ_L は phase shift と呼ばれ、$r > r_{tail} > r_{max}$ を満たすようなじゅうぶん遠方まで波動関数を解くことにより、以下のように求められる。

$$\tan\delta_L = \frac{G j_L(r_{max}) - j_L(r_{tail})}{G n_L(r_{max}) - n_L(r_{tail})}, \qquad G = \frac{r_{max} u_L(r_{tail})}{r_{tail} u_L(r_{max})} \tag{7}$$

§5 全断面積

全断面積は以下のように与えられる。

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{L=0} (2L+1) \sin^2 \delta_L \tag{8}$$

Λ および核子はスピン $\frac{1}{2}$ を持つので、全系のスピンは $S = 1, 0$ が許される。中心力ポテンシャルがスピン依存性を持つ場合には、それぞれからの寄与を考慮して、全断面積は、

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_{triplet} + \frac{1}{4}\sigma_{singlet} \tag{9}$$

で与えられる。